Capítulo 1 - LÓGICA Y VERDAD

***"Una clase es una peripecia de fuerte dramatismo, tanto para el que la da, como para los que la reciben"*. J. Ortega y Gasset.**

Foto clásica de David Hilbert luciendo su sombrero típico de *jipijapa*. Tomada alrededor de 1900. (De la colección Oberwolfach).[1]

1.1 Introducción

En esta exposición tratamos de acercarnos un poco a las nuevas tendencias de la lógica mirando desprevenidamente las conceptualizaciones que filósofos y matemáticos como Jaakko Hintikka (1929 -) y Keith J. Devlin (1947 -) están logrando en tiempos recientes en torno a cómo ellos ven la lógica desde su perspectiva filosófico-matemática.

Jaakko Hintikka, es un lógico finlandés y profesor de la Boston University en Estados Unidos. Su amplia contribución a la lógica y a la filosofía ha sido reconocida internacionalmente al otorgarle en 2005 la máxima exaltación a la que un filósofo puede aspirar: el *Rolf Schock Prize* de la *Royal Swedish Academy of Sciences*[2], premio equiparable a un Nobel y que ha llegado a filósofos tan reconocidos como Willard Van Orman Quine, John Rawls, Solomon Feferman, Dana S. Scott y Saul A. Kripke. A Hintikka se lo clasifica como un continuador de la filosofía analítica entronizada

---

[1] Para más fotos de Hilbert visitar: http://owpdb.mfo.de/

[2] La lista de los premiados y las diferente categorías del Premio Rolf Schock se encuentra en: http://www.kva.se/KVA_Root/eng/awards/international/schock/index.asp?br=ie&ver=4up

por Frege y Russell y luego continuada por Carnap y Quine y más recientemente por su coterráneo, Georg Henrik von Wright, de quien Hintikka fue alumno en los años de la posguerra. Su biografía y producción filosófica se pueden apreciar visitando la página: http://en.wikipedia.org/wiki/Jaakko_Hintikka

Devlin es un matemático inglés, especializado en lógica, que se desempeña como director del *Center for the Study of Language and Information* de la Universidad de Stanford, California. Devlin es un personaje de moda en la comunidad matemática de Estados Unidos, no sólo por los más de diez libros publicados sobre divulgación de temas matemáticos y científicos, si no también, por su columna *Devlin´s Angle* en el Portal de la Mathematical Association of America (MAA) y por sus programas de radio, donde se le conoce con el "alias" de: *The Math Guy* (el tipo matemático). Para apreciar la alta calidad de sus interesantes y variadas columnas, sugiero visitar: http://www.maa.org/devlin/devlin_01_07.html.

Jaakko Hintikka propone en su libro *The Principles of Mathematics Revisited* [3] revisar a la luz de su concepción filosófica muchas de las suposiciones comúnmente aceptadas en la lógica teórica y en la fundamentación de las matemáticas. Su propuesta hace relación al uso de una nueva lógica de primer orden para explicar los fundamentos de las matemáticas. Más concretamente, usar esta lógica de primer orden para expresar en el mismo lenguaje, conceptos como equicardinalidad, infinito y verdad. La lógica que Hintikka propone, la denomina, *amigablemente* independiente (IFL, por su nomenclatura en inglés, *Independence-Friendly Logic*). Los resultados tan conocidos de Gödel y Tarski, que sacudieron las mismas estructuras de las matemáticas y que han dominado el ambiente de los fundamentos de las matemáticas en los últimos setenta años, según la concepción del matemático finlandés, no son tan contundentes como se había creído hasta ahora. Los teoremas de Gödel y Tarski hacen relación a la imposibilidad de construir sistemas axiomáticos completos. Un sistema axiomático es completo si todo enunciado *p*, correctamente formulado, puede probarse como verdadero o como falso. Según Hintikka, las matemáticas comunes y corrientes pueden en principio, de acuerdo a la IFL, desarrollarse en medio de un lenguaje de primer orden, lo que permitiría descartar problemas inherentes a conjuntos y a entidades de orden superior.

Keith Devlin en su libro *Goodbye Descartes*[4] nos pasea por muchos rincones de los vastos territorios de la lógica, al igual que nos introduce en la historia de la lógica, y nos presenta en forma asequible, la resolución de la paradoja de *Epiménides el mentiroso*, usando el recurso de la *teoría situacional*, una creación de los matemáticos Jon Barwise y John Etchemendy en 1986. Veremos en más detalle este tema en próximas páginas.

1. 2 El Problema de la Definición de Verdad.

Empecemos por preguntarnos ¿Cuál es el rol de la lógica en las matemáticas? Nuestros cursos universitarios empiezan, casi siempre, con unas nociones de lógica y teoría de conjuntos, cuyo propósito es dar al estudiante unas herramientas básicas que faciliten, en primer lugar, la comprensión de los métodos de demostración, y en segundo lugar, para que estos mismos estudiantes se vayan ambientando en el conocimientos de conjuntos y entidades que se originan en

---

[3] HINTIKKA, J. *The Principles of Mathematics Revisited.* Cambridge University Press. New York 1998.
[4] DEVLIN, K. *Goodbye, Descartes*. *The end of logic and the search for a new cosmology of the mind.* John Wiley & Sons, Inc. New York. 1998.

cosas tan intuitivas como son los números o los puntos del plano. Lo que hacemos normalmente en lógica, es un poco de lógica simbólica, más específicamente cálculo proposicional y técnicas de demostración muy al estilo de lo que hace Euclides en su obra *Los Elementos.* Sin embargo la lógica, desde el tiempo de Aristóteles, quien fue el primer autor de una obra en estos temas, tiene una cobertura más amplia que involucra la teoría de la argumentación, teoría de la deducción, sistemas axiomáticos o formales, teoría de jerarquías, etc.

Sigamos a Hintikka en su capitulo I del libro citado. Empecemos por decir que un sistema axiomático, o a veces llamado sistema deductivo, es un cuerpo de teoría donde partiendo de unos elementos básicos y unos axiomas, se construye todo un andamiaje de lemas, teoremas y consecuencias que determinan la teoría. Un ejemplo de un sistema axiomático que viene al caso, es el creado por David Hilbert en su obra *Fundamentos de Geometría* (*Grundlagen der Geometrie*) de 1899, en la que presenta la geometría de Euclides como un *sistema formal*, aunque no sea enteramente lógico, por cuanto que es una sistematización de verdades científicas o matemáticas (pero no necesariamente lógicas). La sistematización se lleva a cabo comprimiendo en un solo bloque todas las verdades de la materia a considerar en forma de un listado finito o recursivamente enumerable de axiomas. En cierto sentido este es el alfabeto con el cual se dirán todas las cosas relativas a la materia a tratar, llámese por ejemplo, aritmética, geometría, etc. Este sistema axiomático será completo si, está en capacidad de dar una visión total de la materia en cuestión. Esta idea de un sistema completo podemos parangonarlo con la producción artística de alguien que partiendo de los colores primarios y sus reglas de combinación puede obtener una gran variedad de paisajes. Es decir partiendo de los axiomas, se busca construir a través de consecuencias lógicas los teoremas de su teoría. Nos podemos olvidar de la realidad y crear todo un mundo ideal, el cual no está sustentado en la experimentación o la verificación de nuestros teoremas en la vida real.

Los axiomas son las verdades más simples e inmediatas del sistema de las cuales, por reglas elementales de inferencia o deducción, se seguirán otras verdades menos simples y a veces bien complejas que son los teoremas. La maestría en el manejo del arte de crear teoremas a partir de los axiomas, es lo que crea la riqueza intelectual de los que se dedican al estudio de estas áreas del conocimiento, indistintamente, si los teoremas, o verdades encontradas en la teoría, tengan o no aplicaciones en el dominio de la realidad. El ejemplo extremo de este enfoque es el modelo de Hilbert en torno a la formalización de la geometría, donde términos como: *puntos, planos, círculos*, se pueden cambiar, como dice Hilbert, por *mesas, sillas* o *vasos de cerveza,* o por otros sujetos, sin que la teoría desarrollada se altere en lo referente a su validez teórica. Y ahora, entonces, viene la pregunta: ¿cuál es el papel que juega la lógica en estos sistemas? Es interesante descubrir que la lógica, en *Los Fundamentos de Geometría* de Hilbert está implícita en toda la obra sin dejarse notar a través de símbolos, o en forma retórica explícita. Según Hintikka, esta monografía pudo haberse escrito aún sin que los precursores de la lógica moderna, Boole, Frege o Cantor hubieran nacido. Esto significa que la contribución teórica aportada por estos famosos matemáticos del siglo XIX no es relevante en este trabajo. Es decir, todas las asunciones básicas están codificadas en los axiomas, mientras que los teoremas se derivan de los axiomas por medios puramente lógicos. La idea puede aparecer como lo esencial del método axiomático en general, vista a la luz de nuestros días, pero en los tiempos de David Hilbert este logro fue un paso gigantesco, a tal punto que sus contemporáneos bautizaron este método, como "formalístico". El núcleo central en los sistemas axiomáticos está en usar la lógica para derivar de los axiomas las proposiciones que preservan la verdad, es decir lo que llamamos teoremas. Este procedimiento de obtener consecuencias por métodos puramente lógicos estuvo presente en Aristóteles, pero no, por ejemplo, en pensadores tan importantes como Kant. Este carácter puramente lógico del paso de los axiomas a los teoremas no significa que los teoremas no tengan interpretación en la realidad o que los axiomas mismos, no sean materialmente verdaderos. Hilbert en otros trabajos hizo énfasis sobre la veracidad empírica de los axiomas de la geometría, intentando mostrar que el axioma de continuidad – el que no es del todo intuitivo – es muy cercano a la realidad física.

La cuestión sobre, si las inferencias lógicas pueden ser capturadas por reglas completamente formales (computables, recursivas[5]) es independiente de la cuestión de si el lenguaje del cual estas inferencias son sacadas, es formal (ininterpretable) o informal (interpretable). El problema de interpretación pertenece a las constantes no lógicas del lenguaje[6].

Las constantes lógicas son partes de las proposiciones que se mantienen con un significado específico en la estructura de la oración y no depende del lenguaje que se use. Por ejemplo los cuantificadores "para todo", "para algún", son constantes lógicas, con significado específico, no importa si estamos hablando de geometría, de teoría de conjuntos, de teoría de números o de cualquier otro tema. Constantes no lógicas en el lenguaje de la teoría de números, son por ejemplo, los números específicos o las operaciones que en ella se definan. Así 7 es una constante no lógica en la aritmética, como lo es "+", para significar la adición de números naturales.

Las constantes lógicas se asume que tienen el mismo significado en cualquiera de los dos casos. Sistemas axiomáticos no lógicos ininterpretados pueden pensarse como perteneciendo a ciertas estructuras como tales, mientras los sistemas interpretados tienen que ver con las instancias interpretativas de estas estructuras. Cuando estudiamos algebra moderna lo hacemos con el enfoque axiomático y estudiamos, verbigracia, los grupos, como una estructura con su propio lenguaje y con los axiomas que la define. Sin embargo la teoría de grupos se puede interpretar en la aritmética o en el estudio de cierto tipo de simetrías en cristales, que son entes físicos.

Aquí, entonces, tenemos un ejemplo del rol de la lógica, el cual está supuestamente en lo más alto de las mentes, tanto de lógicos como filósofos y matemáticos. La lógica es el estudio de las relaciones de consecuencias lógicas, esto es, de relaciones de implicación o consecuencialidad. Su manifestación concreta es una habilidad para concebir y llevar a cabo inferencias lógicas, o sea extraer conclusiones deductivamente. Llamaremos a este proceso la función deductiva de la lógica. Las herramientas necesarias para este trabajo se suponen organizadas en una variedad de axiomatizaciones de la lógica. La axiomatización de una parte de la lógica es entendida aquí, simplemente como un método de enumerar recursivamente[7] todas las verdades lógicas[8] expresables en algún lenguaje (formal) explícito o en otro. Esta enumeración se hace aparecer usualmente uniforme con los sistemas axiomáticos no lógicos, como es el caso de la axiomatización de la geometría por Hilbert. La enumeración se obtiene al poner de presente los axiomas formales al comenzar la enumeración, e igualmente las reglas de inferencia cuyas aplicaciones repetidas son

[5] Un conjunto S se dice contable si es finito o enumerable y S es enumerable si se puede poner en correspondencia biunívoca con los números naturales.

[6] José Luís Borges en el Aleph (Editorial Alianza) da una definición interesante de lenguaje que conlleva el ejercicio de compartir una cultura: "todo lenguaje es un alfabeto de símbolos cuyo ejercicio presupone un pasado que los interlocutores comparten", dice.

[7] El término recursivo hace relación al uso de un proceso o procedimiento describible en forma algorítmica por una función recurrente, donde los valores funcionales dependen de los valores previos de la función. Un ejemplo de una función recursiva es: $f(n+1) = f(n-1) + f(n)$, con $f(0)= 1$, $f(1)= 1$, y $n= 2, 3, 4,\ldots$ Esta función tiene por rango el conjunto de los números de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8,...

[8] La verdad lógica la define Ferrater Mora como la conformidad o conveniencia de la mente con la cosa: "*adequatio rei et intellectus*".

los medios de lograr la enumeración total. A pesar de la similitud en los dos enfoques uno debe aceptar que hay diferencias entre los sistemas axiomáticos lógicos, y los no lógicos. La axiomatización no lógica trabaja con la verdad corriente (material o matemática). La axiomatización lógica usualmente se conoce como verdad lógica. Los sistemas axiomáticos no lógicos normalmente tienen previamente una interpretación, aún cuando las consecuencias a partir de los axiomas sean puramente lógicas, mientras una axiomatización de la lógica tiene que ser puramente formal en la generación de la enumerabilidad mecánica. Un sistema axiomático no lógico puede ser formulado sin decir nada acerca de cualquier lógica explícitamente formulada. En efecto, esta es la forma en que procede Hilbert en sus *Grundlagen* (1899). Aún así todas las deducciones de sus teoremas de los axiomas se llevan a cabo muy de conformidad a la más impecable lógica. A ninguna regla explícita de inferencia lógica apela Hilbert en su famoso libro.

De una axiomatización de la lógica se derivan patrones válidos de inferencia como casos especiales de condicionales del tipo

$$S_1 \supset S_2$$

Si y solo si tal condicional (S_1 como antecedente y S_2 como consecuente) es lógicamente verdadero (o válido como a veces se dice). Decimos aquí que hay una inferencia desde S_1 a S_2.

Los conceptos de “regla de inferencia” o aún “regla de inferencia lógica”, son conceptos muy delicados y solo un conocedor o especialista puede usar estos términos en forma apropiada. Al menos hay que distinguir cuidadosamente entre una prueba lógica (de premisas) de una verdad material y prueba (seudo) lógica de una verdad lógica. Esta última se toma meramente como un segmento de la enumeración recursiva de verdades lógicas.

Por una época los matemáticos se inclinaron a tomar la validez de las reglas básicas de la inferencia lógica como un hecho sin discusión. Lo pensaron como tan obvio que no necesitaba el menor análisis. Se asumió, y aún se asume, que Frege y Russell lograron el cometido de certificar esta validez de una vez por todas, o si ellos no lo hicieron, Wilhelm Ackermann, el discípulo de Hilbert lo hizo. Pues Ackermann bajo la guía de Hilbert formuló en 1928 por primera vez las bases de la lógica que desde ese tiempo manejan los matemáticos. Esta parte es la que se conoce generalmente como *lógica de primer orden*, *teoría de cuantificación o cálculo de predicados* (de primer orden). La presentamos como si se tratara de las reglas más elementales de nuestro lenguaje usual, como si tratáramos solamente con los términos “para todos” y “para algún”. Esta idea parece ser reivindicada por el uso que Chomsky hace de la lógica cuantificacional como el medio principal para sus formas lógicas (LF) de los enunciados del lenguaje ordinario. De acuerdo a esta concepción, la lógica de primer orden, se toma generalmente como el núcleo seguro y no problemático de la lógica y que el lenguaje que en ella se soporta se considera como el vehículo natural de nuestros razonamientos normales y de nuestro proceso de pensar. Un número de desarrollos concretos en los fundamentos de las matemáticas ha impulsado a lógicos y matemáticos a presentar axiomatizaciones de esta parte de la lógica separada de aquellas otras que figuran en los escalones superiores de la lógica que involucra cuantificación sobre entidades abstractas, como predicados, clases, conjuntos y/o relaciones.

En efecto es fácil ver por qué la lógica de primer orden parece en principio un sueño hecho realidad para los lógicos. Primero y ante todo, esta lógica admite completa axiomatización. Esto parece a primera vista llenar plenamente todas las expectativas de Hilbert y de otros que creyeron que hay una lógica básica no problemática y completamente axiomatizable. La existencia de esta lógica fue en efecto una de las presunciones de lo que hoy se conoce como el *Programa de Hilbert*, un programa, que permitiera probar la consistencia de ciertas teorías matemáticas, básicamente la aritmética y el análisis, esto es, mostrando que uno no puede formalmente derivar una contradicción de sus axiomas. Si la lógica que se usa no es completa, entonces el proyecto general pierde su foco, porque pueden entonces aparecer contradicciones no probables como tales, entre las consecuencias de los axiomas. Por suerte, parece, la lógica de primer orden, como mostró Kurt Gödel en 1930, resultó completamente axiomatizable. Más aún, puede mostrarse que la lógica de primer orden admite toda suerte de resultados precisos meta lógicos, tales como compactificación (un conjunto infinito de enunciados es consistente si y solo si todos sus subconjuntos finitos lo son) y hasta el teorema de Löwenheim-Skolem (un conjunto finito y consistente de enunciados tiene un modelo contable), el teorema de separación y otros cuya formulación esta fuera del alcance de este curso. En breve, la lógica de primer orden no solo parece básica si no que además se aproxima a lo que podría ser el paraíso para los lógicos.

Filosóficamente, la lógica de primer orden debe su especial estatus mayormente al hecho que, en cierto sentido, es una empresa nominal. Ésta involucra cuantificación solamente sobre individuos, esto es sobre objetos particulares o con entidades tratadas como entes particulares. Esto es, en efecto, la razón para llamarla, lógica de primer orden. Sin embargo la lógica de primer orden tempranamente mostró sus limitaciones para muchos de los desarrollos de las matemáticas relacionados por ejemplo con la inducción matemática, principio de buena ordenación, cardinalidad, conjuntos potencia, entre otros. Se encontró que más allá de la lógica de primer orden, el terreno resultaba incógnito y traicionero. Hay que notar que los métodos que sobrepasan los límites de la lógica de primer orden dan origen a serios problemas, independientemente de si tratamos con teoría de conjuntos, o lógica de orden superior (teoría de tipos). La lógica de segundo orden la llamó Quine una teoría de conjuntos (un lobo) con piel de carnero, donde las paradojas a veces superan a las contradicciones. El adentrarnos en estas honduras nos mostrará que aunque lográramos separar en nuestra teoría lo que es falso, estaríamos en el problema de encontrar medios para saber qué, en la teoría es verdadero. Estos problemas a menudo son muy específicos, como el de decidir la validez del *axioma de elección* (axiom of choice) o decidir cuales axiomas necesitamos en la teoría axiomática de conjuntos y muchos más problemas, casi hasta el infinito.

Hasta aquí parte de las inquietudes planteadas por Hintikka en su primer capítulo del libro citado. Seguidamente se adentra en buscar una respuesta a la pregunta de cómo se podría actualizar los fundamentos de la geometría de Hilbert para ponerlos a tono con el estado del arte de la lógica axiomatizada. Considera la posibilidad de hacer la axiomatización de una teoría matemática usando sólo conceptos básicos de la lógica como cuantificadores y conectivos lógicos. Por ejemplo, en el caso de la geometría de Hilbert, sus axiomas tienen que ver con ciertas relaciones específicas: interestancia, equidistancia, congruencia, etc. Lo que los axiomas dicen de estas entidades se formula por medio de nociones básicas de lógica, como cuantificadores y conectivas. Desde luego Hilbert no usa símbolos lógicos pero establece sus axiomas en el lenguaje ordinario de las matemáticas. Más allá de los axiomas elementales de la geometría está el axioma de Arquímedes (P*ropiedad Arquimediana de los Números Reales*) que afirma que dados dos reales $x < y$, $x > 0$, existe un número natural n tal que $nx > y$, y el axioma de completitud, que induce la noción de maximalidad de un modelo, introducido por Hilbert en ediciones posteriores de los *Grundlagen*. La trascendencia de este axioma se expresa diciendo que los modelos de los otros axiomas deben ser maximales en el sentido de que no se pueda agregar objetos geométricos adicionales sin que alguno de los axiomas iniciales se falsee.

Siguiente Sección. *La Función Descriptiva de la Lógica.*